数理解析研究所講究録 1426 巻 2005 年 113-118

変換と部分評価に基づく非左辺正規なメタ項の停止性証明

蛸島 洋明 [†]　酒井 正彦 [††]　坂部 俊樹 [††]　西田 直樹 [††]　草刈 圭一朗 [††]
TAKOJIMA Hiroaki　SAKAI Masahiko　SAKABE Toshiki　NISHIDA Naoki　KUSAKARI Keiichirou

名古屋大学大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Sciendce, Nagoya University

[†]takojima@sakabe.i.is.nagoya-u.ac.jp
[††]{sakai,sakabe,nishida,kusakari}@is.nagoya-u.ac.jp

概　要

メタ項書き換え計算 (MRC) は項書き換え系 (TRS) の解析・生成・変換を記述・実行するために，書き換え規則を書き換える機能を持つように設計された計算モデルである．書き換え型の計算モデルの最も重要な性質として停止性と合流性がある．MRC の項 (メタ項) はその書き換え規則によって適用可能な範囲が異なる，書き換え規則が別の書き換え規則によって書き換えられるという二つの特徴がある．そのため，従来の項書き換え系の停止性証明法をそのままMRC へ適用できない．本稿では，これら二つの特徴に注目し，一般のメタ項の停止性の十分条件を与える．

キーワード　項書き換え系，メタ項書き換え計算，左辺正規性，停止性

1　はじめに

メタ項書き換え計算 (Metaterm Rewriting Calculus, MRC) は，項書き換え系 (TRS) を処理するプログラム変換などのアルゴリズムの設計・解析に対して形式的な基礎を与えることを目的とする書き換え型の計算モデルである [6]. MRC は TRS の規則や変数宣言を項として表現する機能，また，TRS を関数の引数に渡せる機能などを持つ．MRC は，これらの機能により TRS の記述・実行を直接的に表現できるばかりでなく，TRS の解析・生成・変換などのアルゴリズムの記述・実行が可能である．例えば，帰納的定理の証明において，帰納法のスキーマを表す文脈と証明したい等式を表す項を組み合わせた項を評価することで証明の具体的な作業を自動的に行うことができる．このとき，その MRC の項 (メタ項) の停止性が判明すれば，その自動証明の作業の停止性が保証できる．

MRC においては，一般にはメタ項の停止性は判定不能であるが，どの左辺も書き換えられることがないという性質 (左辺正規性) を保ち続ける性質 (動的左辺正規性) を持つメタ項の停止性の十分条件が知られている [7, 8]. 本稿では，そのような性質を持たないメタ項についても，TRS への変換とその部分評価を組み合わせ，TRS の停止性証明法を利用することによって，メタ項の停止性の十分条件を与えた．TRS の停止性証明法については，文献 [1, 2] など、様々な手法がこれまでに研究されている．また，TTT[4], AProVE[3] などのツールを利用することによって，自動的に TRS の停止性を示すことが可能となる．

2　メタ項書き換え計算 (MRC)

最初に，MRC で用いるメタ項に関する諸定義を与える．

定義 2.1 (メタ項)　$Names$ を名前の集合，$V(\subseteq Names)$ を変数の集合とする．$Names$ 上の**メタ項**は次のように定義される．

- $a \in Names$ はメタ項である．
- L, R, M がメタ項，$n \geq 0$，$x_1, \cdots, x_n \in V$，$m \geq 0$，$f_1, \cdots, f_m \in Names$ であるならば，

$$[f_1/\cdots f_m/x_1....x_n.L \rhd R]M$$

はメタ項である．上記の，$f_1/\cdots f_m/x_1....x_n.L \rhd R$ を規則，$x_1....x_n$ を変数宣言，L, R をそれぞれ左辺，右辺と呼ぶ．

- $k \geq 1$，かつ，$M_i(i = 0, \cdots, k)$ がメタ項であるとき，

  $$M_0(M_1, \cdots, M_k)$$

  はメタ項である．特に，$M_0()$ を M_0 と書く．

例 2.2 以下にメタ項の例を示す．

- $[g/x.g(x) \rhd [f/y.h(y) \rhd f(x,y)]h(b)]g(a)$
- $[g \rhd h][f \rhd g]f(g(a,b))$

メタ項は，規則によって適用可能な範囲が異なる．例2.2の二つ目のメタ項の場合，規則 $g \rhd h$ が適用可能な範囲は，$[f \rhd g]f(g(a,b))$ である．規則 $f \rhd g$ が適用可能な範囲は，$f(g(a,b))$ となる．

メタ項上の書き換え関係は，$\underset{\rho}{\rightarrow}$ で表され，例2.2のメタ項 $[g/x.g(x) \rhd [f/y.h(y) \rhd f(x,y)]h(b)]g(a)$ は，

$$\begin{aligned}
&[g/x.g(x) \rhd [f/y.h(y) \rhd f(x,y)]h(b)]g(a)\\
\underset{\rho}{\rightarrow}\ &[g/x.g(x) \rhd [f/y.h(y) \rhd f(x,y)]h(b)]\\
&[f/y.h(y) \rhd f(a,y)]h(b)\\
\underset{\rho}{\rightarrow}\ &[g/x.g(x) \rhd [f/y.h(y) \rhd f(x,y)]h(b)]\\
&[f/y.h(y) \rhd f(a,y)]f(a,b)
\end{aligned}$$

と書き換えられる．$\underset{\rho}{\rightarrow}$ の反射的推移閉包を $\underset{\rho}{\overset{*}{\rightarrow}}$ と書く．メタ項中の規則は，その規則が適用可能な範囲のみ書き換えることが可能であり，例えば，メタ項 $[a \rhd b][b \rhd c]c$ の規則 $b \rhd c$ が適用可能な範囲は，c であるため，$[a \rhd c][b \rhd c]c$ と書き換えることができない．今後 TRS の書き換えと区別するために**メタ項の書き換え**は $\underset{\rho}{\rightarrow}$ と表現する．

例2.2の一つ目のメタ項の規則 $g/x.g(x) \rhd [f/y.h(y) \rhd f(x,y)]h(b)$ に対して，左辺と右辺に出現する変数 x は**束縛**されている．また，左辺と右辺に出現する名前 g は**保護**されており，このとき左辺と右辺に出現する g は他の規則によって書き換えることができない．つまり，メタ項 $[x.g(x) \rhd c][g/x.g(x) \rhd [f/y.h(y) \rhd f(x,y)]h(b)]c$ に対して，規則 $g/x.g(x) \rhd [f/y.h(y) \rhd f(x,y)]h(b)$ の左辺 $g(x)$ は，c に書き換えられない．しかし，例2.2の一つ目のメタ項について，上記の書き換えで示したように，$g/x.g(x) \rhd [f/y.h(y) \rhd f(x,y)]h(b)$ で $g(a)$ を書き換えることは可能である．

メタ項上の文脈は，特別な定数 □ を1つだけ含むメタ項であり，$C\langle M\rangle$ は文脈 C 中の □ をメタ項 M で置き換えて得られるメタ項を表している．例えば，$C = [g \rhd h][f \rhd g]\Box$，$M = f(g(a,b))$ とすると，$C\langle M\rangle = [g \rhd h][f \rhd g]f(g(a,b))$ となる．

メタ項 $M = [f(x,y) \rhd f(g(x),y)]f(f(a,a),b)$，$\theta = \{(x,b),(y,d)\}$ としたとき，代入 $M\theta$ の結果は $[f(b,d) \rhd f(g(b),d)]f(f(a,a),b)$ である．メタ項中の束縛されていない変数に対して代入されるため，θ の定義域である $\{x,y\}$ がメタ項中で束縛されている場合は，メタ項中の束縛されている変数を名前替えする必要がある．

項書き換え系 (TRS) は書き換え規則の有限集合からなり，与えられた項をその書き換え規則で書き換えることが計算の1ステップとして定義される．例えば，

$\mathcal{R} = \{$`add(0,x)`$\rightarrow$ `x`，`add(s(x),y)`$\rightarrow$ `s(add(x,y))`$\}$

は，自然数の加算 add を定義する TRS である．ただし，自然数は 0 と後者関数 s により表されるとする．この TRS $\mathcal{R}$ において項 `add(s(s(0)),s(0))` を書き換えると3回の書き換え後に `s(s(s(0)))` が得られる．この TRS は，どんな項を入力として与えても $\underset{\mathcal{R}}{\rightarrow}$ の無限系列は存在しないので $\mathcal{R}$ は**停止性を持つ**という．停止性がない場合は，例えば，TRS $\mathcal{R} = \{f(x) \rightarrow g(x),\ g(x) \rightarrow f(x)\}$ に対して，項 $f(a)$ を入力として与えたとき，$f(a) \underset{\mathcal{R}}{\rightarrow} g(a) \underset{\mathcal{R}}{\rightarrow} f(a) \underset{\mathcal{R}}{\rightarrow} \cdots$ となり，$\underset{\mathcal{R}}{\rightarrow}$ の無限系列が存在する．

3 非左辺正規な単純メタ項の停止性

本節では，非左辺正規な単純メタ項に保護演算を加えたメタ項に対する停止性証明法を提案する．

単純メタ項は，前節で定義したメタ項の規則の左辺と右辺および束縛変数に制限を加えて得られるメタ項である．ここでは議論を簡潔にするために，フルセット MRC では略記法として用いられている記法を単純メタ項の構文として定める [5]．最初に単純メタ項の定義を与える．

定義 3.1 (単純メタ項) メタ項 M は次の条件を満たすとき単純であるという．

- M に出現するどの規則の両辺も規則を含まない．
- M に出現するそれぞれの規則 $f_1/\cdots f_m/x_1.\cdots x_n.L \rhd R$ に対して，L は変数 x_i ではなく，かつ，R に出現する x_i は L にも出現する．

- 変数のいかなる出現も束縛されている．(自由な出現のある名前は変数としては出現しない.)

左辺正規性とは，メタ項中のどの規則の左辺も書き換えられない性質のことを言い，例えば，メタ項 $[x.f(x) \rhd b][x.g(x) \rhd f(x)]f(a)$ は，規則の左辺 $f(x)$ と $g(x)$ のいずれも他の規則によって書き換えられないため，左辺正規性を持っている．左辺正規性を持つ単純メタ項の停止性証明法は [7] で提案されている．本節では，$[a \rhd b][a \rhd c]c$ のような，この性質を持たない単純メタ項を対象とした停止性証明法を与える．提案する手法では，単純メタ項から TRS を生成し，その TRS の停止性からメタ項の停止性を導く．文献 [8] の ϕ からも，単純メタ項から TRS を得ることができる．しかし，非左辺正規な単純メタ項 $M = [a \rhd b][a \rhd b]b$ から得られる TRS $\phi(M) = \{a \to b\}$ は停止性を持つが，M は停止性を持たないため，TRS $\phi(M)$ に変換するだけでは，十分ではない．そこで，本手法では，規則の適用可能な範囲を基に規則を階層化し，上の階層から順に部分評価を行う．単純メタ項 $[x.f(x) \rhd a][a \rhd c][x.f(x) \rhd g(b)]f(c)$ に対しては，$f(x) \to a$ が一番上の階層，$a \to c$ がその次の階層，$f(x) \to g(b)$ が一番下の階層となっている．部分評価は，MRC の規則が別の規則によって書き換えられるという特徴に対応しており，TRS の規則の階層に従って行われる．上の階層の規則で下の規則の左辺を書き換えたものを新しい規則として追加させている．上の単純メタ項に対しては，$f(x) \to g(b)$ の左辺が上の階層の規則 $a \to c$, $f(x) \to a$ によって書き換えられ，新しく $a \to g(b)$, $c \to g(b)$ が追加される．このような TRS への変換を以下のように形式化する．

定義 3.2 規則の集合 ρ に対して TRS $\varphi(\rho) = \{L \to R \mid f_1/\cdots f_m/x_1 \ldots x_n.L \rhd R \in \rho\}$ とする．単純メタ項 M と規則の集合 ρ に対して，TRS $(M)^*_\rho$ を以下のように定義する．

- $M = a \in Names$ のとき
$$(M)^*_\rho = \varphi(\rho)$$
- $M = [f_1/\cdots f_m/x_1 \ldots x_n.L \rhd R]N$ のとき
$$(M)^*_\rho = (N)^*_{\delta_\rho(L \rhd R) \cup \varphi(\rho)}$$
- $M = M_0(M_1, \cdots, M_k)$ のとき
$$(M)^*_\rho = (M_1)^*_\rho \cup \cdots \cup (M_k)^*_\rho$$

ただし，$\delta_\rho(L \rhd R) = \{L' \to R \mid L \xrightarrow[\rho]{*} L'\}$ し，これを部分評価と呼ぶ．

単純メタ項 M と規則の集合 ρ から得られた $(M)^*_\rho$ について以下の補題が成立する．

補題 3.3 単純メタ項 M, M' と規則の集合 ρ について，$M \xrightarrow[\rho]{} M'$ とする．このとき，次の 1 から 4 が成立する．

1. $M \xrightarrow[(M)^*_\rho]{} M'$
2. $l \to r \in (M')^*_\rho - (M)^*_\rho$ ならば，$l \xrightarrow[(M)^*_\rho]{+} r$
3. $\xrightarrow[(M')^*_\rho]{} \subseteq \xrightarrow[(M)^*_\rho]{}$
4. $(M)^*_\rho$ が停止性を持つならば，$(M')^*_\rho$ も停止性を持つ．

証明 1. M の構造に関する帰納法で証明できる．

2. M の構造に関する帰納法で証明できる．
3. 任意の項 t に対して $t \xrightarrow[(M')^*_\rho]{k} s$ ならば $t \xrightarrow[(M)^*_\rho]{+} s$ が成立することがステップ数 k に関する帰納法で証明できる．
4. 背理法を用いて証明する．$(M')^*_\rho$ が停止性を持たないと仮定する．3 より，$\xrightarrow[(M')^*_\rho]{} \subseteq \xrightarrow[(M)^*_\rho]{}$ となる．今，$(M')^*_\rho$ は停止性を持っていないので，$(M')^*_\rho$ の無限系列が存在する．このとき，$(M)^*_\rho$ の無限系列が存在することになり $(M)^*_\rho$ が停止性を持つことに矛盾する．□

この補題を用いることによって以下の定理が成立する．

定理 3.4 単純メタ項 M と規則の集合 ρ について TRS $(M)^*_\rho$ が停止性を持つならば，M も停止性を持つ．

証明 背理法を用いて証明する．

$(M)^*_\rho$ は停止性を持ち，M に停止性がないと仮定する．M からの無限系列を $M = M_0 \xrightarrow[\rho]{} M_1 \xrightarrow[\rho]{} \cdots \xrightarrow[\rho]{} M_i \xrightarrow[\rho]{} M_{i+1} \xrightarrow[\rho]{} \cdots$ とする．ここで各段階に対して変換方法を用いて TRS $(M_i)^*_\rho$ $(i = 0, 1, \cdots)$ を考える．今，$(M)^*_\rho$ が停止性を持つので，補題 3.3 の 4 より，任意の i について $(M_i)^*_\rho$ は停止性を持つ．このとき，補題 3.3 の 3 より，任意の項 a, b と任意の i について $a \xrightarrow[(M_{i+1})^*_\rho]{} b$ な

らば $a \xrightarrow[(M_i)^*_\rho]{+} b$ となる．これより，$(M_0)^*_\rho$ によってすべての $(M_i)^*_\rho$ と同様の書き換えが可能になる．よって M_0 の書き換えが停止しないなら，補題 3.3 の 1 より，M_0 から $\xrightarrow[(M_0)^*_\rho]{}$ の無限系列が生成される．これは $(M_0)^*_\rho$ の停止性に矛盾するので，成立する． □

この定理は，左辺正規性を持つ単純メタ項の停止性証明法の一般化となる．定理の適用例を以下に示す．

例 3.5 次のメタ項 M は，項書き換え系によって定義される加算 add が結合則を満たすことの帰納法による証明を自動的に行うためのメタ項である．$\rho = \emptyset$ とする．

```
[x.eq(x,x) ▷ true]
[x.y.add(s(x),y) ▷ s(add(x,y))]
[x.add(0,x) ▷ x]
and(
 eq(add(0,add(q,r)), add(add(0,q),r)),
 [add(p, add(q,r)) ▷ add(add(p,q),r)]
  eq(add(s(p),add(q,r)), add(add(s(p),q),r)))
```

このとき，$(M)^*_\rho = \{$ eq(x,x) $\to$ true , add(s(x),y) $\to$ s(add(x,y)) , add(0,x) $\to$ x , add(p,add(q,r)) $\to$ add(add(p,q),r) $\}$ となる．$(M)^*_\rho$ は停止性を持つので，定理 3.4 より，M は停止性を持つ．実際に書き換えてみると，どのように書き換えても

```
[x.eq(x,x) ▷ true]
[x.y.add(s(x),y) ▷ s(add(x,y))]
[x.add(0,x) ▷ x]
and(
 true,
 [add(p, add(q,r)) ▷ add(add(p,q),r)]
 true)
```

となるので確かに M は停止性を持つ．このメタ項は，証明が成功したことを意味する．

単純メタ項 $M = [a \triangleright f(a)][a \triangleright c]b$ に対して，定義 3.2 から TRS へ変換すると，部分評価のとき $\{a \to f(a),\ a \to c,\ f(a) \to c, \cdots\}$ と無限に続く場合がある．このとき，$(M)^*_\rho$ は無限集合となる．これより，$(M)^*_\rho$ を求めてから停止性を示すのではなく，各部分評価 $\delta_\rho(L \triangleright R)$ を行う前に TRS $\varphi(\rho)$ の停止性を示さなければならない．そこで，TRS の停止性証明手続きを以下に示す．最初に，定義 3.2 と異なる，単純メタ項 M から TRS への変換の定義を与える．

定義 3.6 単純メタ項 M に対して，TRS の組 $\psi(M)$ を以下のように定義する．

- $M = a \in Names$ のとき　$\psi(M) = \langle\rangle$
- $M = [f_1/\cdots f_m/x_1....x_n.L \triangleright R]M'$ のとき
  $\psi(M) = \langle\{L \to R\}, \mathcal{R}_1, \cdots, \mathcal{R}_n\rangle$
  if $\psi(M') = \langle\mathcal{R}_1, \cdots, \mathcal{R}_n\rangle$
- $M = M_0(M_1, \cdots, M_k)$ のとき
  $\psi(M) = \langle\mathcal{R}^1_1, \cdots, \mathcal{R}^1_n\rangle \cup \cdots \cup \langle\mathcal{R}^k_1, \cdots, \mathcal{R}^k_n\rangle$
  if $\psi(M_i) = \langle\mathcal{R}^i_1, \cdots, \mathcal{R}^i_n\rangle$

手続き 3.7 TRS 停止性証明手続きを以下に示す．

入力：TRS の組 $\langle\mathcal{R}_1, \cdots, \mathcal{R}_n\rangle$，TRS $\varphi(\rho)$
出力：$\mathcal{R}_{<n+1}$ または，失敗

$\mathcal{R}_1$ は停止性を持つか？
　yes　続行　otherwise　失敗
for i=1 to n
　$\mathcal{R}_i := \mathcal{T}(\mathcal{R}_i)$
　$\mathcal{R}_{<i+1}$ は停止性を持つか？
　　yes　続行　otherwise　失敗

ただし，変換 $\mathcal{T}$ を以下のように定義する．
$\mathcal{T}(\mathcal{R}_i) = \{l' \to r \mid l \to r \in \mathcal{R}_i, l \xrightarrow[\mathcal{R}_{<i}]{*} l'\}$
ただし，$\mathcal{R}_{<i} = \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{R}_j, \mathcal{R}_0 = \varphi(\rho)$

この手続きは，必ず停止する．また，TRS $\mathcal{R}_{<n+1}$ が出力として得られたとき，$\mathcal{R}_{<n+1}$ は停止性を持つ．

命題 3.8 単純メタ項 M に対して，手続き 3.7 より TRS $\mathcal{R}_{<n+1}$ が得られたならば，$\mathcal{R}_{<n+1} = (M)^*_\rho$ となる．

証明　M の構造に関する帰納法で証明できる．

4　左単純メタ項への拡張

本節では，前節で対象にした単純メタ項から左単純メタ項への拡張を考える．最初に左単純メタ項の定義を与える．

定義 4.1 (左単純メタ項) メタ項 M は次の条件を満たすとき左単純であるという．

- M に出現するどの規則の左辺も規則を含まない．

- M に出現するそれぞれの規則 $f_1/\cdots f_m/x_1.\cdots x_n.L \rhd R$ に対して，L は変数 x_i ではなく，かつ，R に出現する x_i は L にも出現する．
- 変数のいかなる出現も束縛されている．(自由な出現のある名前は変数としては出現しない.)

本節で扱う左単純メタ項は，規則の中の規則の左辺は，全て保護されているという条件と保護演算を加えたメタ項を対象としている．

この条件を満たす左単純メタ項に対する停止性証明法は，前節の単純メタ項に対するものと基本的には同じであるが，TRS への変換の拡張が必要になる．最初に規則の階層化を行う．メタ項 $[a \rhd b][x.f(x) \rhd [a/a \rhd c]x]f([a \rhd d]a)$ に対しては，$a \to b$ が一番上の階層，$f(x) \to [a/a \rhd c]x$ がその次の階層，$a \to d$ が一番下の階層になる．規則中の規則 $a \to c$ は，$f(x) \to [a/a \rhd c]x$ と同じ階層にする．それは，このメタ項を書き換えると，$[a \rhd b][x.f(x) \rhd [a/a \rhd c]x][a/a \rhd c][a \rhd d]a$ となり，$a \to d$ より規則の適用可能な範囲が広いためである．つまり，規則中の規則の階層は，その規則を右辺とする規則と同じ階層にする．部分評価は，$a \to d$ の左辺が上の階層の規則 $a \to b$，$a \to c$ によって書き換えられ，新しく $b \to d$，$c \to d$ が追加される．$a \to c$ は，$a \to b$ よりも階層は下だが，$a \to c$ の左辺 a は保護されて書き換えられないので $b \to c$ という規則は追加されない．つまり，規則中の規則以外の左辺に対して前節と同様の部分評価を行う．このような拡張を以下のように形式化する．

定義 4.2 左単純メタ項 M と規則の集合 ρ に対して，TRS $(\hat{M})^*_\rho$ を以下のように定義する．

- $M = a \in Names$ のとき
$$(\hat{M})^*_\rho = \varphi(\rho)$$
- $M = [f_1/\cdots f_m/x_1.\dots x_n.L \rhd R]N$ のとき
$$(\hat{M})^*_\rho = (\hat{N})^*_{\delta_\rho(L \rhd R) \cup \varphi(\rho) \cup (\hat{R})^*_\emptyset}$$
- $M = M_0(M_1, \cdots, M_k)$ のとき
$$(\hat{M})^*_\rho = (\hat{M_1})^*_\rho \cup \cdots \cup (\hat{M_k})^*_\rho$$

ただし，$\delta_\rho(L \rhd R) = \{L' \to R \mid L \xrightarrow[\rho]{*} L'\}$ し，これを部分評価と呼ぶ．

左単純メタ項 M と規則の集合 ρ から得られた $(\hat{M})^*_\rho$ について以下の補題が成立する．

補題 4.3 左単純メタ項 M と規則の集合 ρ について，$M \xrightarrow[\rho]{} M'$ とする．このとき，次の 1 から 4 が成立する．

1. $M \xrightarrow[(\hat{M})^*_\rho]{} M'$
2. $l \to r \in (\hat{M'})^*_\rho - (\hat{M})^*_\rho$ ならば $l \xrightarrow[(\hat{M})^*_\rho]{+} r$
3. $\xrightarrow[(\hat{M'})^*_\rho]{} \subseteq \xrightarrow[(\hat{M})^*_\rho]{}$
4. $(\hat{M})^*_\rho$ が停止性を持つならば，$(\hat{M'})^*_\rho$ も停止性を持つ．

証明　1. M の構造に関する帰納法で証明できる．

2. M の構造に関する帰納法で証明できる．
3. 任意の項 t に対して $t \xrightarrow[(\hat{M'})^*_\rho]{k} s$ ならば $t \xrightarrow[(\hat{M})^*_\rho]{+} s$ が成立することがステップ数 k に関する帰納法で証明できる．
4. 背理法を用いて証明する．$(\hat{M'})^*_\rho$ が停止性を持たないと仮定する．3 より，$\xrightarrow[(\hat{M'})^*_\rho]{} \subseteq \xrightarrow[(\hat{M})^*_\rho]{}$ となる．今，$(\hat{M'})^*_\rho$ は停止性を持たないので $(\hat{M'})^*_\rho$ の無限系列が存在する．このとき，$(\hat{M})^*_\rho$ の無限系列が存在することになり，$(\hat{M})^*_\rho$ が停止性を持つことに矛盾する．□

この補題を用いることによって以下の定理が成立する．

定理 4.4 左単純メタ項 M と規則の集合 ρ について TRS $(\hat{M})^*_\rho$ が停止性を持つならば，M も停止性を持つ．

証明　背理法を用いて証明する．

$(\hat{M})^*_\rho$ は停止性を持ち，M に停止性がないと仮定する．M からの無限系列を $M = M_0 \xrightarrow[\rho]{} M_1 \xrightarrow[\rho]{} \cdots \xrightarrow[\rho]{} M_i \xrightarrow[\rho]{} M_{i+1} \xrightarrow[\rho]{} \cdots$ とする．ここで各段階に対して変換方法を用いて TRS $(\hat{M_i})^*_\rho$ $(i = 0, 1, \cdots)$ を考える．今，$(\hat{M})^*_\rho$ が停止性を持つので，補題 4.3 の 4 より，任意の i について $(\hat{M_i})^*_\rho$ は停止性を持つ．このとき，補題 4.3 の 3 より，任意の項 a, b と任意の i について $a \xrightarrow[(\hat{M_{i+1}})^*_\rho]{} b$

ならば $a \xrightarrow[(\hat{M}_i)^*_\rho]{+} b$ となる．これより，$(\hat{M}_0)^*_\rho$ によってすべての $(\hat{M}_i)^*_\rho$ と同様の書き換えが可能になる．よって M_0 の書き換えが停止しないなら，補題 4.3 の 1 より，M_0 から $\xrightarrow[(\hat{M}_0)^*_\rho]{}$ の無限系列が生成される．これは $(\hat{M})^*_\rho$ の停止性に矛盾するので，成立する． □

この定理は，左辺正規性を持つ左単純メタ項，前節の単純メタ項の停止性証明法の一般化となる．定理の適用例を以下に示す．

例 4.5 $M = [x.f(x) \triangleright [a/a \triangleright b]x][x.g(x) \triangleright [f/f(b) \triangleright h(c)]x]f([a \triangleright d]g(d))$，$\rho = \emptyset$ とする．このとき，$(\hat{M})^*_\rho = \{f(x) \rightarrow [a/a \triangleright b]x,\ a \rightarrow b,\ g(x) \rightarrow [f/f(b) \triangleright h(c)]x,\ f(b) \rightarrow h(c),\ a \rightarrow d,\ b \rightarrow d\}$ となる．$(\hat{M})^*_\rho$ は停止性があるので，定理 4.4 より，M は停止性を持つ．実際に書き換えてみると，M をどのように書き換えても $M \xrightarrow[\rho]{*} [x.f(x) \triangleright [a/a \triangleright b]x][x.g(x) \triangleright [f/f(b) \triangleright h(c)]x][a/a \triangleright b][b \triangleright d][f/f(b) \triangleright h(c)]d$ となるので確かに M は停止性を持つ．

ここでも，部分評価が続く場合があるが，前節の定義 3.6 を左単純メタ項へ拡張し，手続き 3.7 をそのまま利用することによって，TRS の停止性を示すことができる．

5 まとめ

本稿では，非左辺正規なメタ項の停止性証明法を与えた．この方法は，これまでの動的左辺正規性を持つメタ項や単純メタ項に対しても有効である．これにより，従来よりもかなり広いクラスのメタ項に対して停止性を示すことができるようになった．

実際に MRC で用いられるメタ項は，非左辺正規な左単純メタ項であることが多い．これより，今回提案した手法は，実用的なクラスに対して有効であると考えられる．しかし，今回は規則中の規則の左辺が保護されているという条件があるため，実用的なクラスから少しだけであるが制限が強くなっている．今後の課題として，保護演算を取り除いた左単純メタ項の停止性証明法を与えることが挙げられる．また，今回は定義 3.2 では保護演算を考慮に入れておらず，本来書き換えられない箇所まで部分評価のときに書き換えを許している．そこで，保護演算を考慮に入れて TRS へ変換する方法を与えることも挙げられる．これを解決することによって，停止性を示す精度が向上すると考えられる．

参考文献

[1] Thomas Arts, Jürgen Giesl : Termination of term rewriting using dependency pairs. Theoretical Computer Science, 233:133–178, 2000.

[2] N. Dershowitz : Orderings for Term-Rewriting System, Theor. Comput. Sci. 17, pp. 279–301, 1982.

[3] J. Giesl, R. Thiemann, P. Schneider-Kamp : Automated termination proofs with AProVE. In Proceedings of the 15th International Conference on Rewriting Techniques and Applications. Volume 3091 of LNCS, Springer pp. 210–220, 2004.

[4] N. Hirokawa, A. Middeldorp : Tsukuba termination tool. In Proceedings of the 14th International Conference on Rewriting Techniques and Applications. Volume 2706 of LNCS, Springer pp. 311–320, 2003.

[5] 洪 順姫，酒井 正彦，坂部 俊樹：直行メタ項書換え計算のディベロップメントと合流性，電子情報通信学会技術報告，COMP99-9, pp. 65–70, 1999.

[6] 洪 順姫，酒井 正彦，坂部 俊樹：メタ項書換え計算における規則中に規則を含む直交メタ項の合流性．コンピュータソフトウェア，Vol. 17 No. 6，pp. 47–51, 2000.

[7] 蛸島 洋明, 酒井 正彦, 坂部 俊樹：メタ項書き換え計算における左辺正規性を持つメタ項の停止性について．2003 年度電気関係学会東海支部連合大会講演論文集, p. 565，2003.

[8] 蛸島 洋明：依存対法に基づくメタ項の停止性証明について．夏の LA シンポジウム 2004，pp. S7-1–S7-4, 2004.